

TD 3 : Sommes et produits

Calcul des sommes

1 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

- 1) $1 + 2 + \dots + (n-1) + n + (n-1) + \dots + 2 + 1$
- 2) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n$ puis $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$
- 3) $\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n}$

2 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

- 1) $\sum_{k=0}^n (k+1)^3 - \sum_{k=0}^n k^3$
- 2) $\sum_{k=1}^n (-1)^k$
- 3) $\sum_{k=5}^{13} k$
- 4) $\sum_{k=1}^n \frac{3^k}{4^{2k+1}}$
- 5) $\sum_{k=5}^{n+2} k^2$
- 6) $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2^k}$
- 7) $\sum_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k - 1}$
- 8) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

3 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Démontrer que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

- 2) En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1}$

4 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Calculer $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} \right)$ en fonction de n .
- 2) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$ en fonction de n .

5 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Que vaut la somme $S = \sum_{k=1}^n [(k+1)^4 - k^4]$?
- 2) En réécrivant S différemment, en déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n k^3$.

6 ★★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $S_n = \sum_{k=1}^n kx^k$ ou x est un réel différent de 1. Calculons S_n de deux façons.

- 1) Calculer $(1-x)S_n$ et déduire S_n .
- 2) Dériver la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n x^k$ de deux façons, et en déduire S_n .

7 ★★★ Calculer $\sum_{k=1}^{100} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$

Factorielles et calcul de produits

8 ★★ Écrire à l'aide de factorielles

- 1) $17 \times 16 \times 15 \times 14$
- 2) $16 \times 14 \times 12 \times \dots \times 4 \times 2$
- 3) $15 \times 13 \times 11 \times \dots \times 5 \times 3 \times 1$

9 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\frac{\prod_{k=1}^n (2k-1)}{\prod_{k=1}^n (2k)} = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$$

10 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!}$

11 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^n k \times k! = (n+1)! - 1$$

12 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Simplifier les produits le plus possible en les exprimant avec des puissances ou des factorielles :

- 1) $\prod_{k=1}^n 2^k$
- 2) $\prod_{k=1}^n 2k$
- 3) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k} \right)$
- 4) $\prod_{k=0}^n (2k+1)$
- 5) $\prod_{p=1}^n \frac{2p+1}{2p+5}$
- 6) $\prod_{k=1}^n \frac{3^k}{k^2}$

Coefficients binomiaux

13 ★ Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

$$1. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \quad 2. \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} \quad 3. \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$$

14 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite calculer de deux manières différentes la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}.$$

1) (a) Démontrer que pour tous $k, n \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$, on a $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ (on l'appelle la formule du capitaine).

(b) En déduire S_n .

2) Soit f la fonction définie pour tout $x \in [0, +\infty[$ par $f(x) = (1+x)^n$. On admet que f est dérivable sur $[0, +\infty[$.

(a) Calculer la dérivée de f de deux façons différentes.

(b) En déduire S_n .

15 ★★★ En s'inspirant de la preuve de la formule du capitaine (cf exercice précédent), calculer :

$$1. \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \quad 2. \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} \quad 3. \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k}$$

16 ★★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Calculer :

$$S_1 = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

$$S_2 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

2) En déduire $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k}$ et $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1}$.

Sommes doubles

17 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$1) \sum_{1 \leq i, j \leq n} i \quad 3) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij$$

$$2) \sum_{0 \leq i, j \leq n} x^{i+j} \text{ avec } x \in \mathbb{R}. \quad 4) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (j-i)$$

18 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$1) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i \quad 3) \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j}$$

$$2) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} j \quad 4) \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j-i)$$

Pour la dernière somme, on ne cherchera pas à calculer la somme $\sum_{i=1}^n i^3$.

19 ★★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j)$

20 ★★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i+j=n}} ij$